EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….053**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine aria unui triunghi cu vârfurile în punctele $A(2,1)$, $B(3,4)$, $C(5,3)$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria unui pătrat cu diagonala $\sqrt{2}$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1}{3-4i}$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la cercul de ecuație $x^2+y^2=25$ în punctul $A(3,4)$.

(2p) **f)** Să se determine distanța de la punctul $M(1,2,3)$ la planul de ecuație $x+y+z=7$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}+\left\{\dfrac{2}{2}\right\}+\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

(3p) **b)** Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care $2^n<2007$.

(3p) **c)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$.

Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

(3p) **d)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f=X^3+3X+1$ la polinomul $g=X-1$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element din $\mathbf{Z}_9$ să fie inversabil față de înmulțire.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}+1$

(3p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x\cdot f'(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $M=\left\{ X\in M_2(\mathbf{C}) \mid \exists k\in \mathbf{N},\ k\geq 2,\ X^k=O_2 \right\}$.

(4p) **a)** Să se arate că $A\in M$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice matrice $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$, avem $B^2-(a+d)B+(ad-bc)I_2=O_2$.

(4p) **c)** Să se verifice că $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)$, $\forall\, X, Y\in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $X\in M$, atunci $X^2=O_2$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$, ecuația $Z^n=A$ nu are soluție în $M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția $f: M_2(\mathbf{C})\to M_2(\mathbf{C})$, $f(X)=X^{2007}$ nu este surjectivă.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $B\in M$, atunci $\det\left(I_2+B+B^2+...+B^{2007}\right)=1$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$, $g:(0,1)\to \mathbf{R}$, $g(x)=tg\ x-x$ şi şirurile cu termenul general $(a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$, $(c_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$, definite prin

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n,\ n\in \mathbf{N}^*,\ a_n=tg\frac{1}{n+1}+tg\frac{1}{n+2}+...+tg\frac{1}{n+n},\ n\in \mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x\in(0,1)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe intervalul $(0,1)$.

(4p) **c)** Să se arate că $tg\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\leq tg\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k}\leq tg\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}$, $k=\{1,2,...,n\}$.

(2p) **d)** Aplicând teorema lui *Lagrange* funcției f pe intervalul $[k, k+1]$, $k\in \mathbf{N}^*$, să se arate că $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(c_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este monoton şi mărginit.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ln 2$.